Leeswijzer bij
Wiskundige Technieken 1, 2016

Bij de cursus gaan we nogal kris-kras door het boek (Adams, Calculus a Complete Course, 8e ed.). Dat kan desoriënterend werken, en daarnaast kun je soms een deel van een paragraaf nog niet goed begrijpen omdat een deel van de voorkennis nog niet behandeld is. Deze leeswijzer helpt je door per paragraaf aan te geven wat de hoofdzaak is, wat we in een later stadium nog uitdiepen, en wat je rustig kunt overslaan. De volgorde in dit document is gelijk aan de volgorde in de cursus, althans zoals gepland op tijd van schrijven. Zie de website www.amfidromie.nl/wisna/wisna2016.html voor actueel rooster en andere zaken.

0.1 Voorkennis

De voorkennis voor dit vak is minimaal vwo Wiskunde B. In het bijzonder:

- ben je goed thuis in algebraische vaardigheden (het manipuleren van formules);
- kun je lineaire en kwadratische vergelijkingen moeiteloos oplossen;
- herken je het merkwaardig product $(a-b)^2 = (a-b)(a+b)$;
- kun je zelf beslissen of je aan een formule verder werkt mét of juist zonder haakjes;
- kan je omgaan met (natuurlijke) logaritme, e-macht, ken je de rekenregels daarbij en kun je die zelf toepassen wanneer nodig;
- ken je de goniometrische functies sin, cos en tan en hun eigenschappen, incl. enkele “mooie” waarden zoals $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ etc.;
- ken je de meetkundige betekenis van afgeleide en primitieve;
- kun je elementaire functies en samenstellingen daarvan differentiëren m.b.v. rekenregels;
- kun je eenvoudige elementaire functies primitiveren;
- kun je werken met rechthoekscoördinaten en ken je de vergelijkingen van rechte lijn en cirkel in het vlak;
- herken je kwadraten van (kleine) natuurlijke getallen zoals $49 = 7^2$ en $169 = 13^2$;
- kun je eenvoudige sommetjes incl. breuken uitrekenen zonder rekenmachine;
- heb je enig numeriek inzicht, zoals $2 < \mathrm{e} < 3 < \pi < \sqrt{10}$.

De ervaring leert dat het hebben gehaald van het vwo-Wiskunde B eindexamen geen garantie is dat je aan bovenstaande voorwaarden voldoet. Schaam je daar niet voor! Maar werk er wel hard aan om je **achterstanden** weg te werken. Bijna iedereen heeft wel ergens een hiaat, en bij wiskunde werkt het nu eenmaal zo dat hiaten punten blijven kosten totdat je ze hebt aanpakt. Aan de slag ermee!

Tip om achterstanden weg te werken: ga naar app.dwo.nl, klik op "open DWO voor leerling", login als gast, kies achetreenvolgens Lessenseries, Bovenbouw, Herhaling Wiskunde B. Daarna kun je per onderwerp aan je basiskennis werken.

Indien je ook **Wiskunde D** hebt gedaan dan heb je de eerste weken een voordeel. Let op dat je niet last krijgt van de "wet van de remmende voorsprong": als je nu comfortabel achterover gaat leunen, blijk je straks toch ineens een eind achter te lopen. . . .

Overgang vwo-uni Het tempo ligt hier heel hoog. Bovendien verwachten we van je dat je de stof op een veel hoger niveau begrijpt. Op het vwo oefen je misschien wel een week lang met een nieuw trucje; hier moet je snel leren inzien waaróm het trucje werkt en wanneer het niet werkt en wat je dan wel kunt. Ook dit vereist oefening maar dan op een hoger, abstracter niveau. Je moet ook leren om kennis die je latent wel hebt zelfstandig op het juiste moment wakker te schudden om te gebruiken.

En je moet leren **denken**, want dat leren de meesten niet op het vwo.

0.2 Woordenlijst Engels-Nederlands

www.staff.science.uu.nl/~hogen103/woordenlijst.html

0.3 Vectordictaat Hst 1 en 2

We beginnen met de introductie van vectoren omdat die bij de natuurkundevakken al snel nodig zijn. Zorg dat je goed bekend bent met de begrippen "lengte", "inproduct" en "uitproduct": die zijn uitert belangrijk o.a. bij Natuurkunde en bij WisTech 2. Tip: nieuwe wiskundige begrippen leer je geleidelijk kennen naarmate je meer vertrouwd raakt met hun eigenschappen.

In het korte 2e hoofdstukje leer je een systematische manier om (grote) lineaire stelsels vergelijkingen op te lossen. Het is daarnaast ook een voorbereiding op de matrixtheorie in hst. 3 en 4.

0.4 Complexe getallen: Appendix 1, 2

"Complex" betekent in dit verband "samengesteld": complexe getallen zijn samengesteld uit een reëel en imaginair deel. Met behulp van complexe getallen kun je soms verbanden zien tussen ogenschijnlijk totaal niet verwante zaken. Zo zul je ontdekken dat $\sin x$ en e^x, wanneer je ze uitbreidt tot complexe functies, min of meer "dezelfde" functies zijn. Dit verband hebben we binnenkort nodig bij de behandeling van de harmonische oscillator.

Appendix I is in zijn geheel belangrijk. Je leert rekenen met complexe getallen, omzetten tussen rechthoek- en poolvoorstelling, eigenschappen van beide voorstellingen. Let op bij worteltrekken: "de" wortel uit een complex getal is niet gedefinieerd, je hebt er altijd meer (hoeveel?). Eén ervan is de *hoofdwaarde* (Engels: principal square root): welke?

Appendix II gaat over complexe functies. Je moet weten wat een complexe functie is, en je moet plaatjes kunnen maken die laten zien hoe een functie een gegeven gebied afbeeldt op een ander gebied. Je kent de belangrijkste functie $z \mapsto \mathrm{e}^z$ grondig. Hiermee kun je o.a. de som- en verschilformules van de goniometrie zelf afleiden; dit is in feite hetzelfde als de Stelling van de Moivre uit Appendix I.

Overslaan: limits and continuity, complex derivative, Cauchy-Riemann equations, en fundamental theorem of algebra.

0.5 Basiskennis differentiëren

Het meeste hiervan ken je al van het vwo.

In **§2.2** wordt **afgeleide gedefiniëerd als limiet**:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Limieten behandelen we pas later uitgebreid. Je kunt op dit moment volstaan met een heel intuïtief idee hierbij. In de definitie staat een breuk. In de teller staat het verschil tussen de functiewaarden in twee punten op de x-as die afstand h uit elkaar liggen. In de noemer staat diezelfde afstand h. De breuk geeft dus de helling van de lijn door de twee punten $(x, f(x))$ en $(x + h, f(x + h))$ die allebei op de grafiek van f liggen. Als je h steeds kleiner neemt dan schuiven die punten naar elkaar toe en krijg je meer en meer de raaklijn. Maak een plaatje! Vergelijk met p. 106.

Soms gaat dat mis: het is niet vanzelfsprekend dat die limiet *bestaat*. Bij een knik of sprong in de grafiek gaat het mis, maar daar hoef je je nu nog niet druk om te maken.

In voorbeeld (vb.) 1 en 2 zie je hoe je met limieten werkt, vb. 3 ken je al, let op bij vb. 4. alle **notaties** inclusief die van Leibniz en Newton komen voor en moet je kennen, evenals het evaluatiesymbool in

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\bigg|_{x=a}.$$

Het stukje over **Differentials** kan nuttig zijn om te lezen: het beoogt om wat mysteries rond dx en dy op te helderen maar als dat bij jou niet werkt dan overslaan. Het stukje over **Intermediate Value Property** kun je ook overslaan.

Van **§2.3-5** is hoofdzaak de **rekenregels** kennen en kunnen toepassen. De achtergronden en bewijzen zijn hier niet zo belangrijk, al is fig. 2.19 wel nuttig om de productregel te begrijpen. De **kettingregel** is uiterst belangrijk. Het computerpakket **Maple** gebruiken we niet: alle tekst die ermee te maken heeft standaard overslaan (dit ga ik niet steeds herhalen). **Gonio**: de limieten en afgeleiden van §2.5 zal ik op college inzichtelijk maken. De functies cot, sec en csc en hun afgeleiden komen vaak voor maar je hoeft ze niet uit je hoofd te leren.

0.6 Basiskennis integreren

§2.10: Antiderivative betekent primitieve. ***Een* primitieve** van een functie f is een functie F met de eigenschap dat $F' = f$. Let op: als je een willekeurige constante bij een primitieve optelt dan krijg je opnieuw een primitieve! ***De* onbepaalde integraal** $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ zou je kunnen omschrijven als *algemene primitieve* waarbij je de waarde van de integratieconstante nadrukkelijk in het midden laat. Van het lijstje op p. 150 ken je a t/m h uit je hoofd. Bij f: wat als $r = -1$? Voorbeelden 1 t/m 4 doorwerken.

Een **Differentiaalvergelijking** (d.v.) geeft het verband tussen een functie en (een of meer van) z'n afgeleide(n), bijvoorbeeld $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ waarin $y = y(x)$, een functie van x. Vaak is de vraag: vind alle functies y die aan de d.v. voldoen. Hiervoor moet je doorgaans primitiveren, en wel even veel keer als y in de d.v. gedifferentiëerd is (hier: y'' dus tweemaal, dit is een **tweede orde** vergelijking). Dat levert evenzoveel integratieconstanten op (hier: twee). De hele familie van oplossingen heeft in dit geval dus nog twee onbekenden. Als er nu bovendien twee **beginwaarden** gegeven zijn, zoals $y(1) = 2$ en $y'(1) = -6$, dan leggen die de twee integratieconstanten vast en houd je precies één oplossing over. De d.v. met beginwaarden heet een **beginwaardeprobleem**. Werk de voorbeelden goed door.

De natuurwetenschappen hangen aan elkaar van de d.v.'s, omdat we veel zaken pas het bestuderen waard vinden als ze veranderen. Zolang een kogel braaf onderin de loop van het kanon zit te wachten vinden we er niks aan, maar zodra het kruit ontploft beginnen de sommetjes over kogelbanen. Differentiaalvergelijkingen beschrijven verandering.

Van **§5.1** hoef je alleen de **sigmanotatie** te kennen. Van **§5.2** alleen onthouden dat je oppervlakte kunt opvatten als som van strookjes; al het technische gezever overslaan. Houd de plaatjes op je netvlies. **§5.3**: Riemannsommen heb je de rest van je leven waarschijnlijk niet nodig. Wél belangrijk: **definite integral** oftewel de **bepaalde integraal**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

die je, luchtigjes, op kunt vatten als de Som (vandaar $\int$) van strookjes met hoogte $f(x)$ en breedte $\mathrm{d}x$, tussen beginpunt $x = a$ en eindpunt $x = b$.

Let op het verschil tussen *bepaalde integraal*, nl. de som van die strookjes en dus een *getal*, versus de *onbepaalde integraal*, nl. de "algemene primitieve" en dus een *functie* met nog een onbepaalde constante erin.

In **§5.4 Stelling 3** staan allemaal uiterst belangrijke eigenschappen. Uit je hoofd leren zou kunnen maar belangrijker is dat je ook echt **inziet** dat ze kloppen. Hint: maak bij elke eigenschap een plaatje vóórdat je naar de plaatjes in het boek kijkt. **Mean Value Thm** overslaan. **Piecewise continuous** wel (dit is een makkelijk inkoppertje).

In **§5.5** de **hoofdstelling van de integraalrekening** (fundamental thm of calculus): deze stelling heeft twee delen die beide belangrijk zijn. In feite legt de stelling de relatie tussen primitiveren en integratie, dus ook tussen de onbepaalde en bepaalde integraal. Er staan veel nuttige voorbeelden om door te werken.

0.7 Differentiaalvergelijkingen

De hoofdzaak in §**3.4** is groeiprocessen, maar daar gaat wat aan vooraf.

Stelling 4 is *als stelling* niet de moeite waard om te onthouden, maar *het bewijs* is een uitstekend voorbeeld van het soort redeneringen dat je zelf moet leren maken. Goed bestuderen dus.

Bij **Stelling 5** is het precies omgekeerd: dit is *wel* belangrijk om te weten maar het bewijs is te technisch, zelfs nadat we limieten uitgebreider behandelen. De boeksamenvatting in het blauwe kadertje met het woord “struggle” erin is slecht omdat er niet in staat dat $x \to \infty$ en $a > 0$. In plaats daarvan kun je onthouden:

a. als x groeit en $a > 0$, dan groeit e^x harder dan x^a;

b. als x groeit en $a > 0$, dan groeit x^a harder dan $\log x$.

Ga zelf na dat je daaruit de andere twee kunt afleiden:

c. volgt uit a, als je daarin x vervangt door $-x$ (je hebt de abs waarde $|x|$ nodig omdat je anders in de knoei komt, neem bijv. $x = \frac{1}{2}$);

d. volgt uit b als je daarin x vervangt door $1/x$.

Groei en verval: de exponentiële functie $x \mapsto \mathrm{e}^x$ heeft de bijzondere eigenschap dat hij z’n eigen afgeleide is. Dit betekent dat $y = \mathrm{e}^x$ een oplossing is van de d.v. $y' = y$ of algemener, dat $y = \mathrm{e}^{kx}$ een oplossing is van $y' = ky$. Deze d.v. modelleert situaties waarin de groei of afname y' evenredig is met de reeds bestaande hoeveelheid y, zoals bij radioactief verval. De evenredigheidsconstante k hangt samen met de halfwaardetijd. Kijk goed naar de vb. De paragraaf over **Interest on investmengts** mag je bewaren voor als je later een huis koopt. **Logistische groei** doen we wel. Let op hoe de toevoeging van de factor $\left(1 - \frac{y}{L}\right)$ aan de d.v. zorgt voor een beperking van de groei. Het is essentieel dat je leert doorzien hoe dat werkt.

Over §**7.9:** In eerste ordevergelijkingen staat behalve de onbekende functie ook diens eerste afgeleide, maar geen hogere afgeleiden. **Separabele** d.v.’s kun je oplossen door te **scheiden**: de functie (bijv. y) en z’n differentialen ($\mathrm{d}y$) naar de ene kant te brengen en de anafhankelijke variabele (bijv. x) naar de andere kant. Doe dit wel verstandig en met beleid: zie de voorbeelden en oefen er goed mee. Vb. 5 gebruikt de integratietechniek van breuksplitsen die nog niet behandeld is. Vb. 6, orthogonale trajectoriën, overslaan.

Lineaire d.v.’s vormen een belangrijke klasse omdat ze relatief eenvoudig te begrijpen en op te lossen zijn (verderop leg ik uit waarom ze lineair heten). In deze § de eerste orde lineaire d.v. $y' + p(x)y = q(x)$. Onderscheid **homogeen** waarbij $q(x) = 0$ voor alle x, en anders **inhomogeen**. Er worden twee technieken behandeld: (i) met een **integrerende factor** en (ii) door **variatie van parameter(s)**. Bestudeer beide methoden, ze komen allebei terug in je carrière. In de praktijk kun je meestal zelf kiezen welke methode je gebruikt (en op tentamen zeker). De algemene formules zijn vreselijk en gelukkig ook helemaal niet nodig. In plaats daarvan: net zo lang oefenen met concrete opgaven totdat je de methoden *begrijpt*. Werk de voorbeelden goed door. Vb. 9 is belangrijk o.a. om de fysische context, omdat hij je van je Pavlovreflexen met x en y afhelpt en omdat er de integratietechniek van substitutie gebruikt wordt, zie volgende college.

0.8 Integratie met substitutie

Vooraf: het boek zegt dat je het lijstje elementaire integralen op p. 318 uit je hoofd moet leren. Dat is het meest **stompzinnige advies** dat in het boek staat. Om te beginnen merken de auteurs zelf al op dat 1–6 onder 7 vallen. Inderdaad zijn 7-11 en 15–17 nuttig om te kennen, maar dan met $a = 1$. **De grap van integreren met substitutie is nou juist dat je alle gevallen waarin $a \neq 1$ kunt terugbrengen tot $a = 1$ door de substitutie $u = ax$.** En dat is gelijk een uitstekende oefening om de techniek meester te worden.

Nu dan over de techniek zelf. In feite is het niks anders dan de kettingregel van differentiëren omgekeerd toegepast. Volgens de kettingregel geldt $f'(g(x))g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))$. Beide kanten integreren over x geeft

$$\int f'(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = f(g(x)) + c.$$

Als je hierin $u = g(x)$ schrijft, en opmerkt dat $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x)$ oftewel $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, dan staat er:

$$\int f'(u)\,\mathrm{d}u = f(u) + c.$$

Dat ziet er misschien best logisch uit, maar de kunst is om bij een gegeven integraal (en een hint of idee dat die misschien lukt met substitutie) de juiste functie $u(x)$ te vinden waarmee alles op z'n pootjes terecht komt. Daar is soms creativiteit en inzicht voor nodig, dus begin snel met de voorbeelden en de opgaven. Vaak is het een kwestie van een paar keer proberen voordat je de goeie hebt, zeker in het begin. Je eerste ingeving hoeft niet de beste te zijn.

Als je substitutie doet in een *bepaalde* integraal (dwz met grenzen) dan heb je twee opties:

- grenzen eerst weglaten, vervolgens substitueren, integreren, terugsubstitueren en dan pas weer naar de grenzen kijken, of

- substitueren, grenzen meesubstitueren, integreren en daarna de bepaalde integraal uitrekenen tussen de "nieuwe" grenzen.

Stelling 6 gaat over de tweede optie.

Trigonometric integrals oftewel goniointegralen op p. 321 moet je vooral niet uit je hoofd kennen: ook hier geldt dat het veel meer waard is voor het tentamen en je verdere carrière als je ze zelf kunt vinden met substitutie.

0.9 Diff.vgl, harmonische oscillator

Het gaat hier om lineaire d.v.'s van tweede orde, in eerste instantie met constante coëfficiënten en homogeen. Hoe meer moeilijke woorden er nodig zijn om een verzameling te beschrijven, hoe overzichtelijker de dingen die erin zitten: we hebben het concreet over d.v.'s van de vorm $ay'' + by' + cy = 0$ met a, b, c constante coëfficiënten. Hieronder schets ik de grote lijn van de theorie; vul dit zelf aan met de details die in het boek staan.

Eerst een stukje algemeen inzicht: een *tweede* orde d.v. heeft *twee* integraties nodig om van de afgeleiden af te komen, waarbij je *twee* keer een integratieconstante krijgt. Bij een gegeven tweede-orde d.v. bestaat er dus een *twee*-parameter familie van oplossingen. Als je *twee* begin- of randvoorwaarden hebt dan kun je een unieke oplossing uit de familie aanwijzen door allebei de integratieconstanten uit te rekenen.

Bij de vergelijking $ay'' + by' + cy = 0$ vind je die hele familie van oplossingen door te gokken dat $y = \mathrm{e}^{rt}$ een (enkele, deel-)oplossing is voor nader te bepalen r. Als je die oplossing invult en vervolgens e^{rt} buiten haakjes haalt zie je dat r een oplossing moet zijn van $ar^2 + br + c = 0$ (ga goed na!). Dit heet de **karakteristieke vergelijking**. In het algemeen heeft deze twee (eventueel complexe) oplossingen r_1 en r_2, zodat de d.v. twee oplossingen $y = \mathrm{e}^{r_1 t}$ en $y = \mathrm{e}^{r_2 t}$ toelaat. Maar dan is elke combinatie $y = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ ook een oplossing, wat je ook voor parameters A en B kiest. Controleer dit door invullen en de haakjes uitwerken! Hier heb je dus je twee-parameter familie van oplossingen.

Zie boek voor de drie gevallen die kunnen optreden: de karakteristieke vergelijking heeft twee reële, één (dubbele) reële, of twee complexe oplossingen. Hier blijkt de kracht van de complexe e-macht!

Lineariteit: we zeggen dat $A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ een **lineaire combinatie** van $\mathrm{e}^{r_1 t}$ en $\mathrm{e}^{r_2 t}$ is. Meer in het algemeen heet $r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t) + \cdots + r_n f_n(t)$ een lineaire combinatie van functies $f_1, \ldots, f_n$, net zoals $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$ een lineaire combinatie van vectoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ is. (Terzijde: de naamgeving is naar analogie van de vergelijking van een rechte lijn in het vlak die je zou kunnen opschrijven als $r_1(x - p) + r_2(y - q) = 0$, dit is de rechte door het punt (p, q) met helling r_1/r_2.) **Lineaire d.v.'s zijn precies die d.v.'s waarbij elke lineaire combinatie van oplossingen van de *homogene* vergelijking zelf ook een oplossing van de *homegene* vergelijking is.** De linkerkant van een lineaire d.v. is zelf ook een lineaire combinatie van de onbekende functie (y) en z'n afgeleiden, waarbij dan de coëfficiënten van de d.v. niet constant hoeven te zijn maar kunnen afhangen van t.

Om een **inhomogene vergelijking** op te lossen (§18.6): vind één functie die aan de d.v. voldoet, dit heet de **particuliere oplossing**, en tel daar de algemene oplossing van het homogene probleem bij op. Nota bene: omdat die algemene oplossing voldoet aan de homogene vergelijking, kan hij de oplossing van de inhomogene vergelijking niet verknallen. Mooi hè!

Op p. 1017 staat een heel schema over hoe je in veel voorkomende gevallen een particuliere oplossing kunt vinden. Leer dit *niet* uit je hoofd; indien nodig krijg je bij het tentamen een hint in welke richting je moet zoeken.

Niet-constante coëfficiënten behandelen we niet; de tekst onder **Variation of Parameters** in §18.6 gaat hierover en kun je overslaan.

De **harmonsiche oscillator** is een uiterst belangrijk voorbeeld/toepassing van de hier behandelde theorie. Een inhomogene term in de vergelijking kun je daarbij opvatten als **aandrijving** die mogelijk kan zorgen voor resonantie. Dit zal bij Mechanica ook behandeld worden.

0.10 Hogere orde afgeleiden: Tayloren, buigpunten, etc

§2.6: als je een functie eenmaal kunt differentiëren dan kan het meestal vaker. Zo krijg je hogere orde afgeleiden. De notatie $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$ (NL: n-faculteit) is hier vaak nuttig. Let op voorbeeld 3, dit sluit mooi aan bij het college over de harmonische oscillator.

In **§2.7** gaat over enkele belangrijke toepassingen van differentiëren: benaderingen bij kleine veranderingen, incl. "gemiddelde" en "instantane" verandering en gevoeligheidsanalyse: drie variaties op hetzelfde thema.

In **§2.8** def.6, stellingen 12, 13 en de bijbehorende voorbeelden staat dat een functie (strikt) stijgend, constant of dalend is indien de afgeleide positief, nul of negatief is. Waarschijnlijk is dit wel bekend. Gek genoeg zie ik toch vaak studenten struikelen bij de vraag of een gegeven functie constant is (zonder dat je dat in een oogopslag kunt zien): blijkbaar is het heel lastig om op het idee te komen om eens naar de afgeleide te kijken.

§4.8 gaat over **optimaliseringsproblemen**: vaak een kwestie van het probleem vertalen in een functie waarvan je een maximum (of minimum) zoekt.

§4.9 lineariseren is weer hetzelfde thema als hiervoor in §2.7. Lineariseren geeft je de beste benadering van een functie **in de buurt van** een of ander punt in z'n domein, door gebruik te maken van de afgeleide.

§4.10 maakt een belangrijke nieuwe stap: door hogere afgeleiden te gebruiken kun je nog betere benaderingen krijgen. De **Taylorformule** moet je kennen en kunnen gebruiken, de restterm (remainder) en grote-O notatie mag je overslaan. Alle opgaven mag je dan ook maken zonder foutschatting of interval of Lagrange remainder te geven.

Met de Tayorformule kun je het verband tussen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ enerzijds en $\sin x$, $\cos x$ anderzijds nog eens verifiëren.

0.11 Partieel integreren

Hoofdstuk 6 behandelt een aantal krachtige integratietechnieken. In §6.1 **partiëel integreren**, wat eigenlijk de integratieversie is van de productregel bij differentiëren. Net als bij substitutie heb je creativiteit en ervaring nodig, dus kijk goed naar de voorbeelden en oefen vooral zelf. Je moet steeds een keuze maken welke functie je gaat integreren en welke je gaat differentiëren: soms maakt het niet veel uit wat je kiest, soms wel. Als het niet goed lukt: probeer wat anders. Als het wel goed lukt: toch ook even wat anders proberen, om te zien wat er dan gebeurt.

Het stukje over **reductieformules** is nuttig en helpt je een wat abstractere kijk op formules te ontwikkelen.

0.12 Functies, krommen, inversen, en breuksplitsen

Functies ken je natuurlijk al lang van het vwo. In deze colleges diepen we een aantal zaken iets verder uit. Zo kijken we o.a. naar eigenschappen zoals oneven en even (P4), het samenstellen van functies (P5), stuksgewijze functies (P5) en een bijzonder nuttige klasse namelijk de veeltermen of **polynomen** (P6). Van de laatste is het **delingsalgoritme** belangrijk en ook de **factorstelling**. Als je twee polynomen op elkaar deelt dan krijg je een **rationale functie**. Primitiveren van polynomen is makkelijk, maar bij rationale functies heb je (naast het delingsalgoritme en de factorstelling) vaak de techniek van **breuksplitsen** nodig die behandeld wordt in §6.2.

Kwadraat afsplitsen of "completing the square" is een standaard algebraische vaardigheid die blijkbaar niet iedereen beheerst; werk daar ook aan.

NB de overige paragrafen van hst. P worden **niet behandeld maar worden wel bekend verondersteld**. In het bijzonder geldt dit voor intervallen en ongelijkheden (P1), coordinaten (P2) en grafieken van kwadratische functies (P3), de begrippen domein en bereik (P4), de grafieken van eenvoudige standaardfuncties (P4), en de basiskennis van gonio-, log- en exponentiële functies (P7, 3.2, 3.3) worden ook bekend verondersteld. Als dat weggezakt is, haal het dan zelf op.

Tot slot kijken we nog naar §3.1 over **inverse functies**. Alleen **een-op-een** functies (defn.1) hebben een inverse (def. 2), de inverse van de inverse is de functie zelf althans waar dat zinvol is (p. 166 midden), en op p. 167 staat een lijstje eigenschappen. Inmiddels ben je er hopelijk al aan gewend dat je zo'n lijstje **niet** uit je hoofd leert, maar wel goed bestudeert zodat je de eigenschappen **begrijpt**. Hetzelfde geldt voor de **afgeleide** op p. 168-69. In **§3.5** passen we de kennis over inversen toe om de cirkelfuncties arcsin etc beter te leren kennen.

0.13 Limieten en continuiteit

Het limietbegrip ligt aan de basis van differentiëren, integreren en ook continuïteit. Historisch gezien heeft het die fundamentele rol pas laat gekregen en zoals je gemerkt hebt kun je uitstekend differentiëren en integreren zonder je veel om limieten te bekommeren. Toch moeten we er wel wat aan doen, ook al omdat limieten op veel meer plaatsen opduiken.

In **§1.2**, definitie 1 komt de informele definitie van **limieten** aan bod. De notatie $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betekent: je kunt $f(x)$ zo dicht bij L krijgen als je wilt, als je x maar dicht genoeg bij a kiest.

Let op: "x dicht bij a" betekent hier o.a. $x \neq a$; het zou best kunnen zijn dat $f(a) = L$, of $f(a) \neq L$, of misschien is $f(a)$ niet eens gedefinieerd; daar maakt lim zich niet druk om.

Definitie 2 gaat over linker- en rechter limieten waarbij je x maar aan één kant van a neemt. Stelling 1 formuleert een voordehandliggende conclusie over het verband tussen definities 1 en 2. In stellingen 2 en 3 staan een aantal belangrijke rekenregels voor limieten, die je goed moet kunnen gebruiken.

Stelling 4 is de **insluitstelling**; deze is heel belangrijk en het heeft groot praktisch nut om hem op het juiste moment (bijv. tentamen) uit je hoge hoed te kunnen toveren.

In **§1.3** lim en ∞: een goed standaardvoorbeeld om in gedachten te houden is de functie $f(x) = 1/x$. In praktijk zijn deze limieten uiterst belangrijk.

In **§1.4** gaat het over **continuïteit**. We zeggen dat een functie f continu is in a indien $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$; m.a.w. de functiewaarde *in* een punt is gelijk aan de limiet *in de buurt van* dat punt. Verder zeggen we dat f continu is op een interval indien f continu is in elk punt van het interval; of kortweg continu indien dat op elk punt van het domein zo is. Zie de definities en stellingen in het boek.

Gelukkig zijn de meeste functies die je kent continu en ook de meeste combinaties en samenstellingen van continue functies zijn continu (stellingen 6 en 7).

Soms, bijvoorbeeld bij breukfuncties met een noemer die een nulpunt heeft, gaat continuïteit is een enkel los punt mis. Zie de voorbeelden 7 en 8.

Stelling 8 komt in meer dimensies volgend blok aan de beurt. Vanaf hier kun je de paragraaf overslaan. Paragraaf 1.5 laten we liggen voor de hardcore wiskundigen.

Aansluitend kunnen we nu in **§2.2** nogmaals kijken naar de limiet-definitie van afgeleide.

Ten slotte **§4.3** over "lastige limieten" waarbij je niet eenvoudig ziet wat er gebeurt. Zie het lijstje bovenaan p. 229 en vraag je af: waarom juist *die* vormen genoemd staan, en waarom niet allerlei andere zoals $[0/\infty]$? Welke kun je nog meer verzinnen?

Een populaire techniek om dit soort "onbepaalde vormen" aan te pakken is met een van de stellingen van l'Hôpital. Er zijn er twee en ze worden vaak misbruikt. Zie de voorbeelden en de twee waarschuwingen in de marge van het boek.

0.14 Functieonderzoek

Motivatie: Van sommige standaardfuncties zoals e^x en $\cos x$ heb je een idee hoe de grafiek er globaal uitziet, en van een aantal andere zoals e^{-x} of $3\cos 4x$ kun je de grafiek makkelijk vinden met behulp van de standaardfuncties en een eenvoudige transformatie. Bij veel andere functies zul je misschien snel naar een of andere *plotting tool* zoals GRM of een app op je tablet grijpen. In dit onderdeel van de cursus leer je om zelf op een systematische manier het globale verloop van een functie te vinden. Dit is belangrijk omdat het je helpt om de resultaten van een *plotting tool* te interpreteren, maar vooral omdat het je traint in **onderzoeksvaardighied**: je moet namelijk gegevens verzamelen en verwerken, waarbij in de praktijk vaak zal blijken dat je een aantal foutjes gemaakt hebt: het gaat er dus ook en vooral om dat je de verzamelde gegevens kritisch bekijkt en dat je signaleert wanneer ze met elkaar in strijd zijn en dat je vervolgens vindt waar je een foutje hebt gemaakt.

In de paragrafen 4.4 t/m 4.6 oefen je hiermee. Op p. 249 staat een **checklist**: oefen ermee en gebruik die zo vaak totdat je het riedeltje kunt dromen. In het tentamen komt gegarandeerd een opgave over functieonderzoek.

Voor zover nodig kun je nog wat vwo-stof ophalen over stijgen en dalen van functies in §2.8 def.6, stellingen 12,13 en de bijbehorende voorbeelden; hoewel we deze paragraaf over de middelwaardestelling eigenlijk overslaan.

0.15 Integreren met "inverse" substituties

We gaan verder met integratietechnieken: in **§6.3** behandelt het boek "inverse substituties" waarvan vooral de goniometrische niet zo vanzelf spreken. In de volgende gevallen kunnen zulke substituties nuttig zijn:

- Als in de integrand $\sqrt{a^2 - x^2}$ voorkomt, kan substitutie van $x = a \sin\theta$ handig zijn, omdat daardoor die wortel overgaat in $\cos\theta$. Denk bij deze vorm aan de afgeleide van de inverse functie $\theta = \arcsin x/a$.
- Als in de integrand $\sqrt{x^2 - a^2}$ voorkomt, dan kan $x = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ van pas komen, omdat $\sqrt{x^2 - a^2} = a|\tan\theta|$.
- Als in de integrand $\sqrt{a^2 + x^2}$ of $(a^2 + x^2)^{-1}$ voorkomt dan kan $x = a\tan\theta$ goed uitkomen; denk hierbij aan de afgeleide van de inverse functie $\theta = \arctan x/a$.

Let bij deze drie gevallen steeds goed op het "zinvolle domein": bijvoorbeeld, in het eerste geval is de worteluitdrukking zinvol mits $-a \leq x \leq a$, en dus moet $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, en voor die waarden van θ geldt $0 \leq \cos\theta \leq 1$; je hoeft dus niet met een eventueel minteken rekening te houden.

Bestudeer de voorbeelden 1 t/m 10 goed.

Een bijzonder fraaie substitutie is die met $x = \tan\theta/2$. Deze zal als er tijd voor is op een hoor- of werkcollege behandeld worden.

0.16 Impliciet differentiëren

Een vergelijking zoals $x^2+y^2 = 25$ kun je opvatten als een verband tussen twee variabelen x en y maar ook als een kromme in het vlak: in dit geval een cirkel met zeker middelpunt en zekere straal. Soms kun je zo'n verband herschrijven waarbij je één van de variabelen uitdrukt in de andere. In het voorbeeld moet je dan kiezen: hetzij $y = \sqrt{25 - x^2}$, hetzij $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Je ziet hieraan al direct dat de vorm $x^2 + y^2 = 25$ algemener is; beide afzonderlijke functies zitten hier **impliciet** in besloten. Bij een voorschrift zoals $x^2y + xy^2 = 25$ is het al niet eens meer mogelijk om expliciet de ene variabele in de andere uit te drukken. Om zulke **impliciet gegeven functies** te onderzoeken is het handig als je **impliciet differentiëren** kent. Die techniek wordt behandeld in §2.9.

0.17 Oneigenlijke integralen

"Oneindig" kan op twee manieren opduiken bij bepaalde integralen: bij de integratiegrenzen (bijvoorbeeld $\int_1^\infty 1/x\,\mathrm{d}x$) en/of de integrand (bijvoorbeeld $\int_0^1 1/x\,\mathrm{d}x$). Beide typen pakken we in beginsel op dezelfde manier aan: eerst beperken we het integratie-interval tot een "schoon" gebied waarin zich geen moeilijkheden voordoen en vervolgens rekken we het interval op met een limiet richting het probleempunt. Dit staat geformaliseerd in definities 1 en 2. Zie ook voorbeelden.

Stelling 2 is een belangrijk resultaat. Ook hier geldt weer: het is belangrijker dat je dit zelf kunt uitrekenen dan dat je de stelling uit je hoofd leert. In het algemeen hoef je geen bewijzen te kennen maar dit is gewoon uitrekenen, dat hoor je te kunnen.

Bij oneigenlijke integralen is het niet altijd zo dat "er wat uitkomt", net als bij limieten (het zijn eigenlijk ook limieten). We onderscheiden gevallen waar dat wel zo is en die zogezegd **convergeren**, van gevallen die **divergeren** waar dat niet zo is. In praktijk is het expliciet uitrekenen van een integraal vaak niet mogelijk en ben je al blij als je kunt aantonen of er con- of divergentie optreedt. Misschien komen we eraan toe om daar wat aan te doen, in ieder geval zul je deze kwestie nog vaak tegenkomen in je carrière.

0.18 Toepassingen

Nader te bepalen selectie uit onderwerpen van hst 7 en 8.